

Natural Deduction for the Sentential Calculus, Examples
 Logic 2510, 10 September 2007

Example 1: $(A \wedge B), (C \wedge D) \vdash (A \wedge D)$

1	1. $(A \wedge B)$	A
2	2. $(C \wedge D)$	A
1	3. A	1, $\wedge E$
2	4. D	2, $\wedge E$
1,2	5. $(A \wedge D)$	3, 4 $\wedge I$

Example 2: $(P \wedge (Q \wedge R)), S \vdash (R \wedge S)$

The following derivation is incorrect. Can you see why?

1	1. $(P \wedge (Q \wedge R))$	A
2	2. S	A
1	3. R	1 $\wedge E$
1, 2	4. $(R \wedge S)$	2, 3 $\wedge I$

This derivation is correct:

1	1. $(P \wedge (Q \wedge R))$	A
2	2. S	A
1	3. $(Q \wedge R)$	1 $\wedge E$
1	4. R	3 $\wedge E$
1, 2	5. $(R \wedge S)$	2, 4 $\wedge I$

Example 3: $(P \rightarrow Q), (Q \rightarrow R), P \vdash R$

1	1. $(P \rightarrow Q)$	A
2	2. $(Q \rightarrow R)$	A
3	3. P	A
1, 3	4. Q	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5. R	2, 4 $\rightarrow E$

Example 4: $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)), (P \wedge Q) \vdash R$

The following derivation is incorrect. Can you see how to correct it?

1	1. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$	A
2	2. $(P \wedge Q)$	A
2	3. Q	2 $\wedge E$
1, 2	4. R	1, 3 $\rightarrow E$

Example 5: $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)), Q \vdash (P \rightarrow R)$

1	1. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$	A
2	2. Q	A
3	3. P	A
1, 3	4. $(Q \rightarrow R)$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5. R	2, 4 $\rightarrow E$
1, 2	6. $(P \rightarrow R)$	3, 5 $\rightarrow I$

Example 6: $((P \wedge Q) \rightarrow R) \vdash (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$

1	1. $((P \wedge Q) \rightarrow R)$	A
2	2. P	A
3	3. Q	A
2, 3	4. $(P \wedge Q)$	2, 3 $\wedge I$
1, 2, 3	5. R	1, 4 $\rightarrow E$
1, 2	6. $(Q \rightarrow R)$	3, 5 $\rightarrow I$
1	7. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$	2, 6 $\rightarrow I$

Example 7: $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

1	1. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$	A
2	2. $(P \rightarrow Q)$	A
3	3. P	A
1, 3	4. $(Q \rightarrow R)$	1, 3 $\rightarrow E$
2, 3	5. Q	2, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	6. R	4, 5 $\rightarrow E$
1, 2	7. $(P \rightarrow R)$	3, 6 $\rightarrow I$
1	8. $((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$	2, 7 $\rightarrow I$

Example 8: $P \vdash (Q \rightarrow P)$

1	1. P	A
2	2. Q	A
1	3. $(Q \rightarrow P)$	2, 1 $\rightarrow I$

Example 9: $(P \rightarrow Q), (Q \rightarrow R) \vdash (P \rightarrow R)$ (Hypothetical syllogism)

1	1. $(P \rightarrow Q)$	A
2	2. $(Q \rightarrow R)$	A
3	3. P	A
1, 3	4. Q	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5. R	2, 4 $\rightarrow E$
1, 2	6. $(P \rightarrow R)$	3, 5 $\rightarrow I$

Example 10: $\neg(P \wedge \neg Q) \vdash (P \rightarrow Q)$

1	1. $\neg(P \wedge \neg Q)$	A
2	2. P	A
3	3. $\neg Q$	A
2, 3	4. $(P \wedge \neg Q)$	2, 3 $\wedge I$
1, 2, 3	5. $((P \wedge \neg Q) \wedge \neg(P \wedge \neg Q))$	4, 1 $\wedge I$
1, 2	6. Q	3, 5 $\neg E$
1	7. $(P \rightarrow Q)$	2, 6 $\rightarrow I$

Example 11: $P, \neg P \vdash \neg Q$

1	1. P	A
---	------	---

2	2. $\neg P$	A
3	3. Q	A
1, 2	4. $(P \wedge \neg P)$	1, 2 $\wedge I$
1, 2	5. $\neg Q$	3, 4 $\neg I$

Example 12: $(\neg P \rightarrow \neg Q) \vdash (Q \rightarrow P)$

1	1. $(\neg P \rightarrow \neg Q)$	A
2	2. Q	A
3	3. $\neg P$	A
1, 3	4. $\neg Q$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5. $(Q \wedge \neg Q)$	2, 4 $\wedge I$
1, 2	6. P	3, 5 $\neg E$
1	7. $(Q \rightarrow P)$	2, 6 $\rightarrow I$

Example 13: $((PVQ) \rightarrow R) \vdash (P \rightarrow R)$

1	1. $((PVQ) \rightarrow R)$	A
2	2. P	A
2	3. (PVQ)	2, VI
1, 2	4. R	1, 3 $\rightarrow E$
1	5. $(P \rightarrow R)$	2, 4 $\rightarrow I$

Example 14: $\neg(P \rightarrow Q) \vdash \neg(\neg PVQ)$

1	1. $\neg(P \rightarrow Q)$	A
2	2. $(\neg PVQ)$	A
3	3. P	A
4	4. $\neg P$	A
3, 4	5. $(P \wedge \neg P)$	3, 4 $\wedge I$
3	6. $\rightarrow P$	4, 5 $\rightarrow I$
2, 3	7. Q	2, 6 $\vee E$
2	8. $(P \rightarrow Q)$	3, 7 $\rightarrow I$
1, 2	9. $((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q))$	8, 1 $\wedge I$
1	10. $\neg(\neg PVQ)$	2, 9 $\neg I$

Example 15: $(P \wedge (QVR)) \vdash ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$

1	1. $(P \wedge (QVR))$	A
1	2. P	1, $\wedge E$
1	3. (QVR)	1, $\wedge E$
4	4. Q	A
1, 4	5. $(P \wedge Q)$	2, 4 $\wedge I$
1	6. $(Q \rightarrow (P \wedge Q))$	4, 5 $\rightarrow I$
7	7. R	A
1, 7	8. $(P \wedge R)$	2, 7 $\wedge I$
1	9. $(R \rightarrow (P \wedge R))$	7, 8 $\rightarrow I$
1	10. $((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$	3, 6, 9 PC

Example 16: $(P \leftrightarrow \neg Q) \vdash \neg(P \leftrightarrow Q)$

1	1. $(P \leftrightarrow \neg Q)$	A
2	2. $(P \leftrightarrow Q)$	A
1	3. $((P \leftrightarrow \neg Q) \wedge \neg(Q \leftrightarrow P))$	1 $\leftrightarrow E$

1	4. $(P \leftrightarrow \neg Q)$	3 $\wedge E$
1	5. $(\neg Q \leftrightarrow P)$	3 $\wedge E$
2	6. $((P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow P))$	2 $\leftrightarrow E$
2	7. $(P \leftrightarrow Q)$	6 $\wedge E$
2	8. $(Q \leftrightarrow P)$	6 $\wedge E$
9	9. P	A
1, 9	10. $\neg Q$	4, 9 $\rightarrow E$
2, 9	11. Q	7, 9 $\rightarrow E$
1, 2, 9	12. $(Q \wedge \neg Q)$	10, 11 $\wedge I$
1, 2	13. $\neg P$	9, 12 $\neg I$
14	14. $\neg Q$	A
1, 14	15. P	5, 14 $\rightarrow E$
1, 2, 14	16. $(P \wedge \neg P)$	13, 15 $\wedge I$
1, 2	17. Q	14, 16 $\rightarrow E$
1, 2	18. P	8, 17 $\rightarrow E$
1, 2	19. $(P \wedge \neg P)$	13, 18 $\wedge I$
1	20. $\neg(P \leftrightarrow Q)$	2, 19 $\neg E$