

Topic 1: Answers to Exercise 1.4.5a

Exercise 1.4.5a

Show the following:

$(P \rightarrow Q), (R \rightarrow Q) \vdash ((P \vee R) \rightarrow Q)$

1	1. $(P \rightarrow Q)$	A
2	2. $(R \rightarrow Q)$	A
3	3. $(P \vee R)$	A
1,2,3	4. $(Q \vee Q)$	1,2,3 PC
5	5. $\sim Q$	A
1,2,3,5	6. Q	4,5 $\vee E$
1,2,3,5	7. $(Q \& \sim Q)$	5,6 $\&I$
1,2,3	8. Q	5,7 $\sim E$
1,2	9. $((P \vee R) \rightarrow Q)$	3,8 $\rightarrow I$

$(A \& B), (C \& D) \vdash (A \& D)$

1	1. $(A \& B)$	A
2	2. $(C \& D)$	A
1	3. A	1 $\&E$
2	4. D	2 $\&E$
1,2	5. $(A \& D)$	3,4 $\&I$

$(P \& (Q \& R)), S \vdash (R \& S)$

1	1. $(P \& (Q \& R))$	A
2	2. S	A
1	3. $(Q \& R)$	1 $\&E$
1	4. R	3 $\&E$
1,2	5. $(R \& S)$	4,2 $\&I$

$(P \rightarrow Q), (Q \rightarrow R), P \vdash R$

1	1. $(P \rightarrow Q)$	A
2	2. $(Q \rightarrow R)$	A
3	3. P	A
1,3	4. Q	1,3 \rightarrow E
1,2,3	5. R	2,4 \rightarrow E

$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)), (P \& Q) \vdash R$

1	1. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$	A
2	2. $(P \& Q)$	A
2	3. P	2 &E
1,2	4. $(Q \rightarrow R)$	1,3 \rightarrow E
2	5. Q	2 &E
1,2	6. R	4,5 \rightarrow E

$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)), Q \vdash (P \rightarrow R)$

1	1. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$	A
2	2. Q	A
3	3. P	A
1,3	4. $(Q \rightarrow R)$	1,3 \rightarrow E
1,2,3	5. R	2,4 \rightarrow E
1,2	6. $(P \rightarrow R)$	3,5 \rightarrow I

$((P \& Q) \rightarrow R) \vdash (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$

1	1. $((P \& Q) \rightarrow R)$	A
2	2. P	A
3	3. Q	A
2,3	4. $(P \& Q)$	2,3 &I
1,2,3	5. R	1,4 \rightarrow E
1,2	6. $(Q \rightarrow R)$	3,5 \rightarrow I

1 7. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ 2,6 \rightarrow I

$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

1	1. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$	A
2	2. $(P \rightarrow Q)$	A
3	3. P	A
2,3	4. Q	2,3 \rightarrow E
1,3	5. $(Q \rightarrow R)$	1,3 \rightarrow E
1,2,3	6. R	4,5 \rightarrow E
1,2	7. $(P \rightarrow R)$	3,6 \rightarrow I
1	8. $((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$	2,7 \rightarrow I

$P \vdash (Q \rightarrow P)$

1	1. P	A
2	2. Q	A
1	3. $(Q \rightarrow P)$	2,1 \rightarrow I

$(P \rightarrow Q), (Q \rightarrow R) \vdash (P \rightarrow R)$

1	1. $(P \rightarrow Q)$	A
2	2. $(Q \rightarrow R)$	A
3	3. P	A
1,3	4. Q	1,3 \rightarrow E
1,2,3	5. R	2,4 \rightarrow E
1,2	6. $(P \rightarrow R)$	3,5 \rightarrow I

$\sim(P \& \sim Q) \vdash (P \rightarrow Q)$

1	1. $\sim(P \& \sim Q)$	A
2	2. P	A
3	3. $\sim Q$	A
2,3	4. $(P \& \sim Q)$	2,3 $\&$ I

1,2,3	5. $((P \ \& \ \sim Q) \ \& \ \sim(P \ \& \ \sim Q))$	1,4 &I
1,2	6. Q	3,5 ~E
1	7. $(P \rightarrow Q)$	2,6 \rightarrow I

$P, \sim P \vdash \sim Q$

1	1. P	A
2	2. $\sim P$	A
3	3. Q	A
1,2	4. $(P \ \& \ \sim P)$	1,2 &I
1,2	5. $\sim Q$	3,4 ~I

$(\sim P \rightarrow \sim Q) \vdash (Q \rightarrow P)$

1	1. $(\sim P \rightarrow \sim Q)$	A
2	2. Q	A
3	3. $\sim P$	A
1,3	4. $\sim Q$	1,3 \rightarrow E
1,2,3	5. $(Q \ \& \ \sim Q)$	2,4 &I
1,2	6. P	3,5 ~E
1	7. $(Q \rightarrow P)$	2,6 \rightarrow I

$((P \vee Q) \rightarrow R) \vdash (P \rightarrow R)$

1	1. $((P \vee Q) \rightarrow R)$	A
2	2. P	A
2	3. $(P \vee Q)$	2 \vee I
1,2	4. R	1,3 \rightarrow E
1	5. $(P \rightarrow R)$	2,4 \rightarrow I

$\sim(P \rightarrow Q) \vdash \sim(\sim P \vee Q)$

1	1. $\sim(P \rightarrow Q)$	A
2	2. $(\sim P \vee Q)$	A

3	3. P	A
4	4. $\sim P$	A
3,4	5. $(P \& \sim P)$	3,4 &I
3	6. $\sim\sim P$	4,5 $\sim I$
2,3	7. Q	2,6 $\vee E$
2	8. $(P \rightarrow Q)$	3,7 $\rightarrow I$
1,2	9. $((P \rightarrow Q) \& \sim(P \rightarrow Q))$	1,8 &I
1	10. $\sim(\sim P \vee Q)$	2,9 $\sim I$

$(P \& (Q \vee R)) \vdash ((P \& Q) \vee (P \& R))$

1	1. $(P \& (Q \vee R))$	A
1	2. P	1 &E
1	3. $(Q \vee R)$	1 &E
4	4. Q	A
1,4	5. $(P \& Q)$	2,4 &I
6	6. R	A
1,6	7. $(P \& R)$	2,6 &I
1	8. $(Q \rightarrow (P \& Q))$	4,5 $\rightarrow I$
1	9. $(R \rightarrow (P \& R))$	6,7 $\rightarrow I$
1	10. $((P \& Q) \vee (P \& R))$	3,8,9 PC

$(P \leftrightarrow \sim Q) \vdash \sim(P \leftrightarrow Q)$

1	1. $(P \leftrightarrow \sim Q)$	A
2	2. $(P \leftrightarrow Q)$	A
2	3. $((P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P))$	2 $\leftrightarrow E$
2	4. $(P \rightarrow Q)$	3 &E
1	5. $((P \rightarrow \sim Q) \& (\sim Q \rightarrow P))$	1 $\leftrightarrow E$
1	6. $(P \rightarrow \sim Q)$	5 &E
7	7. P	A
2,7	8. Q	4,7 $\rightarrow E$
1,7	9. $\sim Q$	6,7 $\rightarrow E$
1,2,7	10. $(Q \& \sim Q)$	8,9 &I
1,2	11. $\sim P$	7,10 $\sim I$

12	12. $\sim(Q \vee \sim Q)$	A
13	13. Q	A
13	14. $(Q \vee \sim Q)$	13 $\vee I$
12,13	15. $((Q \vee \sim Q) \& \sim(Q \vee \sim Q))$	12,14 $\&I$
12	16. $\sim Q$	13,15 $\sim I$
12	17. $(Q \vee \sim Q)$	16 $\vee I$
12	18. $((Q \vee \sim Q) \& \sim(Q \vee \sim Q))$	12,17 $\&I$
	19. $(Q \vee \sim Q)$	12,18 $\sim E$
2	20. $(Q \rightarrow P)$	3 $\rightarrow E$
1	21. $(\sim Q \rightarrow P)$	5 $\rightarrow E$
1,2	22. $(P \vee P)$	19,20,21 PC
23	23. $\sim P$	A
1,2,23	24. P	22,23 $\vee E$
1,2,23	25. $(P \& \sim P)$	23,24 $\&I$
1,2	26. P	23,25 $\sim E$
1,2	27. $(P \& \sim P)$	11,26 $\&I$
1	28. $\sim(P \leftrightarrow Q)$	2,27 $\sim I$